前期日程

令和6年度入学試験問題

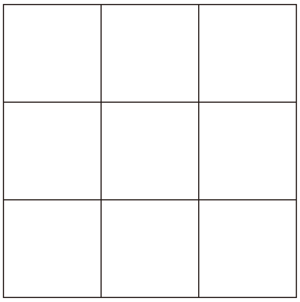
数　　学

(数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B)

注　意　事　項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**
2. 解答はすべて別紙解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙は5枚です。
4. 問題番号の印刷してある解答用紙に解答しなさい。
5. 各解答用紙には，受験番号を記入する欄がそれぞれ2箇所あります。2箇所とも記入しなさい。
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

1　同じ大きさの正方形を縦に3個，横に3個並べて作った下図のような盤がある。



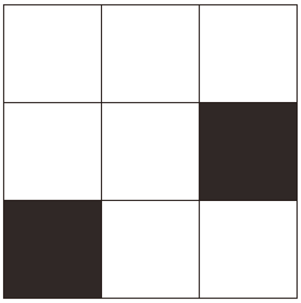
これら9個の正方形のうち，ちょうど2個の正方形を黒く塗りつぶして模様を作ることを考える。下に挙げた具体例を参考に，以下の問いに答えよ。

問 1　何通りの模様ができるか答えよ。

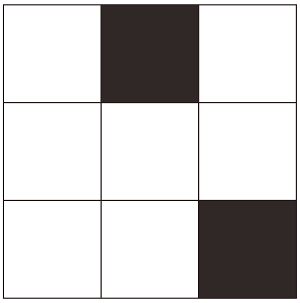
問 2　盤を回転させて同じ模様になる場合は同じとすると，何通りの模様ができるか答えよ。

問 3　盤を回転させたり裏返したりして同じ模様になる場合は同じとすると，何通りの模様ができるか答えよ。

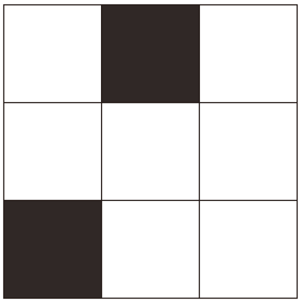
(具体例)問1においては図a，図b，図cがすべて異なる模様となるが，問2においては図aと図bが同じ模様となり，さらに問3においては図cも図aと同じ模様となる。



図a



図b



図c

2 a_1 を無理数とし，2以上の整数 n に対し a_n を

$$a_n = 2\sqrt{a_{n-1}} + 3$$

と定める。このとき，1以上のすべての整数 n について，a_n が無理数であることを，数学的帰納法を用いて示せ。

3 座標空間に四面体OABCがあり，頂点の座標がそれぞれO(0, 0, 0)，A(1, 2, 1)，B(2, 1, 2)，C(−2, 0, 2)であるとする。以下の問いに答えよ。

問 1　三角形OABの面積を求めよ。

問 2　線分OCが平面OABと垂直に交わることを示し，四面体OABCの体積を求めよ。

問 3　点Oから平面ABCへの垂線OHの長さを求めよ。

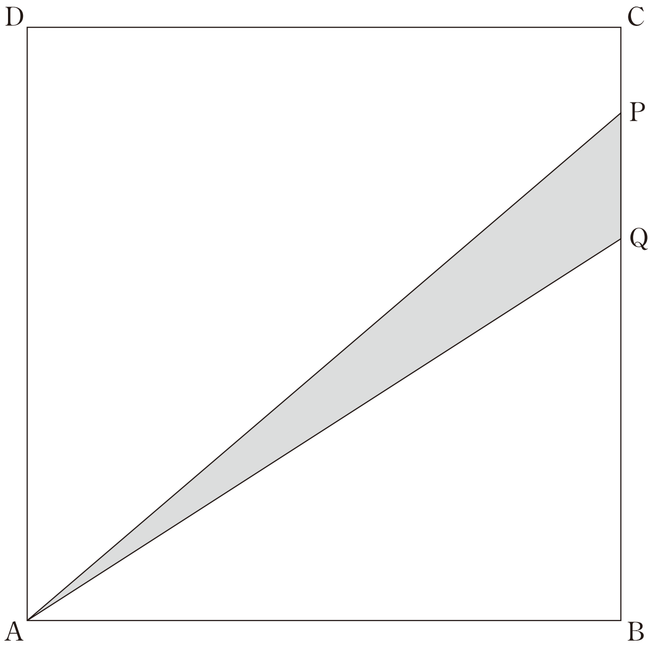
問 4　問3で定めた点Hの座標を求めよ。

4 下図のような一辺の長さが2の正方形ABCDがある。点P，Qは正方形ABCDの周上を点Bを出発点として，点C，点D，点Aの順で，t秒後にそれぞれt^2，tだけ進み，点Pが点Aに到着するまで動く。t秒後の三角形APQの面積をtの関数として$S(t)$と表したとき，以下の問いに答えよ。ただし，AP，PQ，QAのいずれかの辺の長さが0になるときは$S(t) = 0$と定める。

問 1 $S(t)$をtの式で表せ。

問 2 $0 < t < \sqrt{6}$における関数$S(t)$の極大値，極小値をすべて求めよ。

問 3 関数$S(t)$は$t = \sqrt{2}$で微分可能かどうか判定せよ。



5 以下の問いに答えよ。

問 1　定積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

の値を $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta + \frac{1}{2}$ とおいて求めよ。

問 2　次の等式が x についての恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ。

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b(2x - 1)}{x^2 - x + 1} + \frac{c}{x^2 - x + 1}$$

問 3　極限

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{n^2}{1^3 + n^3} + \frac{n^2}{2^3 + n^3} + \cdots\cdots + \frac{n^2}{n^3 + n^3}\right)$$

の値を求めよ。