# 自然科学系 数学教育講座 准教授 市延（いちのべ） 邦夫（くにお）


研究分野のキーワード：微分方程式，ベキ級数，発散級数，ボレル総和法，解析接続

研究紹介

私は微分方程式を研究しています。微分方程式とは、世の中の自然現象や社会現象を記述した方程式で、数学的には、未知関数（求める関数）の導関数を含む方程式のことです。世の中の現象を記述した微分方程式に解というものが存在し、その解を求めることが出来るとどんないいことがあるかというと、その現象の未来を予測することが出来るのです。物理を習ったことがある人にとっては、物体の投げ上げ運動は微分方程式の例です。物体の鉛直投げ上げ運動では、初速度がいくつのときに、物体を放り投げると何秒後に一番高い所に上がり、何秒後には元の場所に戻ってくる、ということが実際に物体を投げなくても知ることが出来ます。この考えは昔のヨーロッパの大航海時代に、大砲をどのくらい傾けて発射すれば、遠くにいる敵の船に当てることが出来るのかという戦争に応用されました。現代では、ロケットの発射、帰還などに利用されています。さて、物理の物体の運動には微分は出てこなかった、と思う人もいるでしょう。物体の運動はニュートンの運動方程式Ｆ＝ｍａで記述されます。ここで、Ｆは力、ｍは物体の重さ、ａは物体の加速度を表します。この加速度は速さｖの時間変数に関する微分、ａ=ｖ’で与えられます。すなわち、ニュートンの運動方程式はＦ＝ｍｖ’と書くことが出来、方程式に微分（導関数）が含まれます。もちろん、速さｖは位置(距離)ｘの微分、ｖ＝ｘ’で与えられるので、Ｆ＝ｍｘ”と書くことも出来ます。

少し難しくなりますが、微分方程式の解をベキ級数で求めることがあります。級数は高校で学んでいます。しかし、次のような級数の和を考えて見ます。

Ｓ＝１－１＋１－１＋・・・・・

この級数を次のように計算してみます。

Ｓ＝（１－１）＋（１－１）＋・・・・・　＝　０＋０＋・・・・　＝　０

また、次のようにして計算してみます。

Ｓ＝１＋（－１＋１）＋（－１＋１）＋・・・・・　＝　１＋０＋０＋・・・・　＝　１

おかしなことが起こるので、間を取ってＳ＝１／２とでもしますか？！

この級数は初項１、公比（－１）の無限等比級数です。公比の絶対値が１より小さくないため収束しません。すなわち、発散します。数学では、このような発散級数に意味があるのかを問います。この問のひとつの答えを得るためにボレル総和法と呼ばれるものがあります。このボレル総和法によって、微分方程式のベキ級数解が発散している場合にも意味のある解を得ることが出来ます。また、先ほどの発散級数

Ｓ＝１－１＋１－１＋・・・・・

は実はＳ＝１／２とボレル総和されるのです。難しい言葉ですが、ベキ級数の解析接続を通して意味づけされます。