自然科学系 数学教育講座 講師 井上（いのうえ） 歩（あゆむ）

研究分野のキーワード：位相幾何学，結び目理論，カンドル理論，コンピュータグラフィクス

研究紹介

手元に紐を二本用意して，それぞれ適当に結んでみて下さい．出来上がった二つの結び目は同じでしょうか？　それとも異なっているでしょうか？

どんなに複雑に結ばれていても，（結びをほどくことで）紐は必ずまっすぐにできますから，二つの結び目は同じと言えるかもしれません．しかし例えば，蝶結びした紐は両端を引っ張ればまっすぐになりますが，固結びした紐は両端を引っ張っても決してまっすぐにはなりません．ですから，蝶結びと固結びは異なる結び目と考えるのが自然ではないでしょうか？

では，どのようにすれば蝶結びと固結びを区別できるようになるのか．その一つの方法は，結んだ後に紐の両端をくっつけて，紐を閉じてしまうことです．蝶結びした紐は閉じていても単純な輪に変形できますが，固結びした紐は決して単純な輪には変形できません．よって，この二つは異なる，と結論付けるわけです．この方法によって結び目を分類しようというのが，私の研究分野である「結び目理論」です．結び目理論は，柔らかい幾何学とも呼ばれる「位相幾何学」の主要な分野の一つであり，多くの研究者により日々研究が進められています．

与えられた二つの結び目（紐は閉じてある）が同じであることは，片方を変形してもう一方と同じ形にできさえすれば，証明が可能です．しかし二つの結び目が異なることを示すことは，容易ではありません．仮に一年間寝る間も惜しんで変形しても同じ形にできなかったとして，翌日以降にも同じ形にできない保証はなにもありません．二つの結び目が本当に異なることを示すには，その根拠を与える必要があるのです．

そこで，結び目に対して何か数を割り当てること考えます．割り当てられた数は，結び目を変形しても全く変化しないという性質を持つとします．このとき，与えられた二つの結び目に割り当てられた数が互いに異なれば，この二つの結び目は異なると結論付けることができます．なぜならば，変形して同じ形にできるのならば，割り当てられた数は一致していなければならないからです．この数の割り当てを，結び目の不変量と呼びます．不変量の値が異なることは，結び目が異なることへの根拠を与えてくれます．私は「カンドル理論」と呼ばれる代数の理論を利用して結び目の不変量を構成し，これを用いることでどのような性質・観点から結び目が分類できるのかについて研究を進めています．

ところで，数学的に結び目は“円周を３次元空間に埋め込んだもの”として定式化されます．このアナロジーとして“球面を４次元空間に埋め込んだもの”を考え，これを２次元結び目と呼びます．２次元結び目は直接目に見えませんが，いくつかの可視化方法が考案されています．しかしこれは，紙と鉛筆で描くには少々複雑すぎる対象です．そこで私は「コンピュータグラフィクス」として２次元結び目を可視化し，これを研究に活用することにも取り組んでいます．