

研究分野のキーワード：確率論，ブラウン運動，伊藤解析，マリアヴァン解析，超関数

研究紹介

100 円玉一個と数直線を用意しましょう。100 円玉がなければ 10 円玉でも結構です。数直線には原点をとり，原点から左右に 1cm きざみで点を打っておきます。原点にコマを置きます。100 円玉をトスして，表がでたら右隣の点に，裏なら左隣の点にコマを動かします。この操作を何回も繰り返しましょう。例えば 100 円玉が，表，裏，表，表，と出たら，コマは $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ と動きます。このような仕組みで数直線上をランダムに右往左往する動きのことをランダムウォークといいます。さてここで，コイントスをスピードアップして 1 分間でのトスの回数を 100 倍，10000 倍，…とふやしていきましょう。そのかわり左右へとぶ距離を 1mm, 0.1mm, …と小さくしていきます。するとランダムウォークは，せっかちに小刻みに振動しながら数直線上を彷徨っていく動きになります。これをブラウン運動といいます。

ブラウン運動はランダムな現象を記述し，考察するためのひとつの大きな礎です。伊藤清先生は，ランダムな現象をブラウン運動の関数として記述し，解析する術を研究されました。これを伊藤解析といいます。1997 年，シヨールズ氏とマートン氏は，ノーベル経済学賞を受賞しましたが，彼らの研究の大きな部分はこの伊藤解析が占めています。

さて話はがらりと変わりますが，関数 f とは何でしょうか。 x という値に対して $f(x)$ という値を対応させる対応のことでしたね。ここで g という別の関数を与えると，決められた区間における $f(x)g(x)$ の定積分によって，関数 g ごとに一つの値が定まります。これを $T(g)$ と書くことにします。この定まり方は関数 f によって決まります。そこで関数 f とは変換 T のことなのだと思うことができます。実はこの変換 T は，関数と対応していないものでも考えられるのです。この関数の「おぼけ」を超関数といいます。

話をブラウン運動に戻しましょう。フランスの数学者，P. マリアヴァン先生は，ブラウン運動の関数の世界に微分を導入して，ブラウン運動の超関数の理論を打ち立てました。これをマリアヴァン解析といいます。

ブラウン運動は確率論において基本的な対象ですので，その様々な性質は詳しく調べられています。たとえばブラウン運動が決められた 1 点で過ごす時間（局所時間といいます）についてもよく研究されています。ところが，平面上のブラウン運動（ x 座標と y 座標がそれぞれ独立なブラウン運動で動くもの）を考えると，その局所時間はブラウン運動の超関数となってしまいます。この局所時間のようなブラウン運動の関数や超関数に対して，伊藤解析やマリアヴァン解析を駆使して，いろいろな性質を見つけ出しています。