前期日程

令和5年度入学試験問題

数学

(数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答はすべて別紙解答用紙に記入しなさい。
3. 解答用紙は5枚です。
   問題番号の印刷してある解答用紙に解答しなさい。
4. 各解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ2箇所あります。2箇所とも記入しなさい。
5. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

1 以下の問いに答えよ。

問 1　自然数 a で

$$a \leqq \sqrt[3]{10} < a + 1$$

となるものを求めよ。

問 2　a を問 1 で求めた値とする。さらに b を 0 以上 9 以下の整数とするとき，

$$a + \frac{b}{10} \leqq \sqrt[3]{10} < a + \frac{b+1}{10}$$

となるような b を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

問 1　2 以上のすべての自然数 n について

$$a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots\cdots \times a_n \times \sin\frac{\pi}{2^n} = 1$$

となることを，数学的帰納法を用いて示せ。

問 2　極限値

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{a_2}{2}\right)\times\left(\frac{a_3}{2}\right)\times\left(\frac{a_4}{2}\right)\times\cdots\cdots\times\left(\frac{a_n}{2}\right)$$

を求めよ。

3 OA ＝ OB ＝ AC ＝ BC ＝ 3，OC ＝ AB ＝ 2 である四面体 OABC を考える。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，また 3 点 O，A，B が定める平面を α とするとき，以下の問いに答えよ。

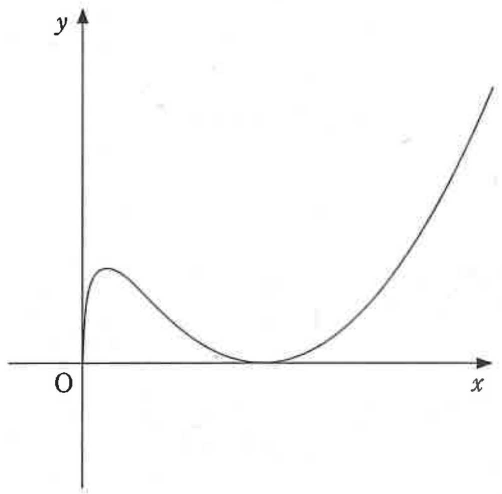
問 1　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}\cdot\vec{c}$ をそれぞれ求めよ。

問 2　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ が平面 α に垂直となるように，p，q の値を定めよ。

4 $f(t)=e^t$, $g(t)=t^2e^t$ とし，t がすべての実数を動くとき

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

で与えられる曲線を C とする。この曲線 C の概形は下図である。



以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

問 1　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(f(t),\ g(t))$ で曲線 C に接する接線の方程式を t を用いて表せ。

問 2　問 1 において $t=-1$ としたときの接線を ℓ とする。接線 ℓ と曲線 C の交点は $(e^{-1},\ e^{-1})$ のみであることを示せ。

問 3　曲線 C と問 2 の接線 ℓ および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ 関数

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + e^x}$$

について，

$$g(x) = f(x) + f(-x), \quad h(x) = f(x) - f(-x)$$

とおく。以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

問 1　定積分

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$$

の値を求めよ。

問 2　$h(x)$ は奇関数であることを示せ。

問 3　定積分

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

の値を求めよ。