

令和7年度 愛知教育大学第2年次編入学試験問題

標準的解答例または出題の意図、評価の観点

科目名： 数学

略解

1 問 1. 合成公式を用いれば,

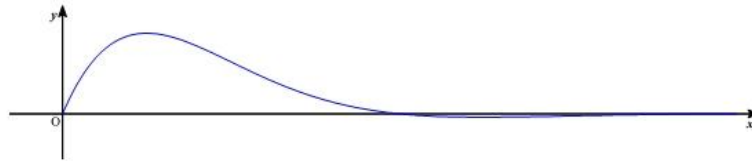
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}(-\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \\ f''(x) &= (f'(x))' = \left(\sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\right)' \\ &= \sqrt{2}e^{-x} \left(-\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となる.

問 2. $f'(x) = 0$ となるのは, $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, $f''(x) = 0$ となるのは, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ であることに注意して増減表を書いたものが下記.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0	-	-
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}}}$	↗	$-e^{-\frac{3\pi}{2}}$	↗	0

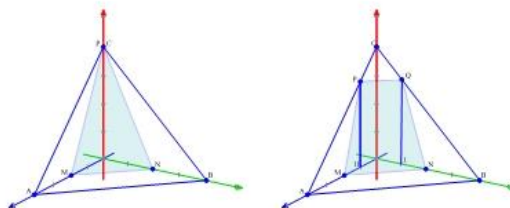
また, これをもとにグラフを描いたものが下図.



2 問 1. 切断面 D_0 は左下図水色部分. $PM = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, $MN = 2\sqrt{2}$ から二等辺三角形 PMN の高さは $\sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$ となる. したがって断面積は,

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$$

である.



問 2. 切断面 D_1 は右上図水色部分の等脚台形. $PM = \sqrt{MH^2 + HP^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $PQ = \sqrt{2}$, $MN = 2\sqrt{2}$ となるので, 台形 $PQNM$ の高さは

$$\sqrt{MP^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \sqrt{10 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

となり, 断面積は,

$$\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{\frac{19}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{19}$$

である.

3 問 1.

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

に注意すると, a_{n+1} は a_n を $\pi/3$ 回転し, 長さを $1/2$ にしたものである. すると $\angle a_n O a_{n+1} = \pi/3$ かつ $a_n : a_{n+1} = 2 : 1$ から, 三角形 $a_n O a_{n+1}$ は $1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形である. したがって

$$|a_1| = 1, |a_2| = \frac{1}{2}, |a_3| = \frac{1}{2^2}, \dots, |a_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

と分かり,

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot |a_n| |a_{n+1}| \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2^{2n+1}}$$

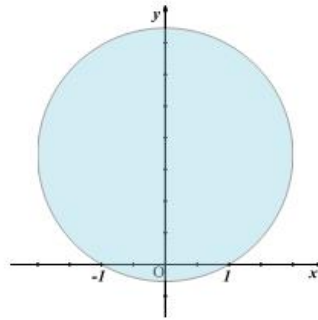
となる.

問 2. $\{S_n\}$ は初項 $\frac{\sqrt{3}}{8}$, 公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから, 求める極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる.

4 問 1. $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y = x^2 + (y - \sqrt{3})^2 - 3 \leq 1$, すなわち $x^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 4$ となり, 領域 D は下図.



問 2. $-2 \leq x \leq 2$ に対し, $y = \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - x^2}$ に注意すると, 求める体積は,

$$\begin{aligned} & 2 \left(\int_0^2 \pi \left(\sqrt{3} + \sqrt{4 - x^2} \right)^2 dx - \int_1^2 \pi \left(\sqrt{3} - \sqrt{4 - x^2} \right)^2 dx \right) \\ &= 2\pi \int_0^1 (7 - x^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{4 - x^2}) dx + 8\sqrt{3}\pi \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx \\ &= 2\pi \left[7x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 4\sqrt{3}\pi \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx + 8\sqrt{3}\pi \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx \end{aligned}$$

となる. $x = 2 \sin t$ と置換すれば, $\sqrt{4 - x^2} dx = 4 \cos^2 t dt = 2(\cos 2t + 1) dt$ に注意すると,

$$\begin{aligned} &= \frac{40\pi}{3} + 8\sqrt{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1) dt + 16\sqrt{3}\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt \\ &= \frac{40\pi}{3} + 8\sqrt{3}\pi \left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + 16\sqrt{3}\pi \left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{40\pi}{3} + 6\pi + \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi^2 - 12\pi + \frac{16\sqrt{3}}{3}\pi^2 = \frac{22\pi + 20\sqrt{3}\pi^2}{3} \end{aligned}$$

となる.

問 3. $x = r \cos \theta, y - \sqrt{3} = r \sin \theta$ と置換すれば,

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos^2 \theta (r \sin \theta + \sqrt{3}) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^4 \cos^2 \theta \sin \theta + \sqrt{3} r^3 \cos^2 \theta) d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-r^4 \cos^3 \theta}{3} + \sqrt{3} r^3 \left(\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]_0^{2\pi} dr = \int_0^2 \sqrt{3} \pi r^3 dr = 4\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

5 問 1. 固有方程式は

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4) = 0$$

となるから、固有値は $\lambda = \pm 1, \pm 2$ である。すると、固有値・固有ベクトルの組（の例）は

$$(1, {}^t(1, 0, 0, 1)), (-1, {}^t(-1, 0, 0, 1)), (2, {}^t(0, 1, 1, 0)), (-2, {}^t(0, -1, 1, 0))$$

となることが分かる。

問 2. 4 つの固有ベクトルは互いに直交しているので、ベクトルの長さを 1 に正規化して並べれば、 A を対角化する直交行列は以下。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6

$$\frac{2}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{3} - i}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

に注意すれば、

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3} + i}\right)^7 = \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

すなわち、 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1}{2}$ である。

7 $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置けば、 $dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt$ および

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} = e^t$$

から、

$$\int (x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \int e^t \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt = \frac{1}{2} \int (e^{2t} + 1) dt = \frac{e^{2t}}{4} + t + C$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

8

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (b+a) & (c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

となる。