

令和6年度学長裁量経費採択課題（詳細内容）

科研費獲得サポート重点研究費

公募分野	代表者		テーマ
2	数学教育講座	岸 康弘	連分数による実2次整環のイデアル類群の構造解析
プロジェクト概要		代数体の極大整環におけるイデアル類群の位数は類数と呼ばれ、既約元への一意分解性の"ずれ"を表す不変量として古くから研究の対象となっている。しかしながら、その値は未だ明確に捉えられておらず、「類数が1となる実2次体が無数に存在する」という実2次体に関するガウス予想は、代数的数論において長きにわたる未解決問題である。本研究は、実2次無理数の連分数を扱いこの問題に迫る。具体的には、実2次体の類数が1となるための必要十分条件を与えたLuの定理を、ある実2次無理数の連分数展開の性質を利用して、実2次整環と呼ばれる一般の整環へ拡張し、さらには連分数とイデアル類群との間に関連性を見出すことを目的とする。	
研究の目的		本研究は有理数全体の集合である有理数体を拡張した代数体を研究する代数的整数論に属し、特に代数体の中の実2次体を研究の対象としている。2以上の整数が素数の積に一意的に表せることは「素因数分解の一意性」と呼ばれ、整数の世界ではよく知られた性質である。その「素因数分解の一意性」が実2次体において成り立つのかを考えるのが本研究である。素因数分解の一意性が成り立つことは代数体の言葉では「イデアル類群の位数（＝類数）が1である」ことと同値であることが知られ、イデアル類群は古くから研究の対象とされている。本研究では連分数を用いて実2次体のイデアル類群の構造や類数の解析を試みる。最終的な目標は、類数が1となる実2次体の構成方法を与え、さらにそのような実2次体の無数個の存在を示すことで、実2次体に関するガウス予想を肯定的に解決することである。 本研究期間においては、実2次体の類数が1となるための必要十分条件を与えたLuの定理を、ある実2次無理数の連分数展開の性質を利用して、実2次整環と呼ばれる一般の整環へ拡張し、さらには連分数とイデアル類群との間に関連性を見出すことを目標としている。	
研究の方法		基本的な手法は、極大整環の性質と一般整環の性質の違いの分析、また連分数の性質を利用することである。本研究に限って言えば、Luの定理で使用された連分数に関連するある不変量をいかに拡張するかが研究の核となる。このために、計算を使った数値実験を行い、データを集め予想を立てることで、その不変量の分析を行った。さらには、ある不定方程式の解の個数に着目し、約数関数などを用いてその個数を数え上げ、最終的な成果を得ることができた。これらのことは、元学習院大学の河本史紀氏とともに研究を行っている。	

研究の成果	1979年にLuによって与えられた実2次体の類数が1となるための必要十分条件を、実2次無理数の連分数展開の性質を利用して、実2次整環と呼ばれる一般の整環へ拡張した。また、この結果の副産物として、2003年にBiroによって示された2つの予想（Yokoi予想, Chowla予想）の拡張も得ることができた。 これらの研究成果は、2つの研究集会「International Conference on Class Groups of Number Fields and Related Topics-2024（2024年11月、インド科学教育研究大学Berhampur校にて開催）」及び「都立大整数論セミナー（2024年12月、東京都立大学にて開催）」において発表を行い、さらには本研究を論文にまとめ、国際的な数学雑誌『Functiones et Approximatio, Commentarii Mathematici』に現在投稿中である。
--------------	--